

量表發展工作坊(1)： 探索式因素分析(EFA)-觀念介紹

By

劉介宇

April 19, 2013

1

Introduction-Measurement Theory

- Measurement theory (測量理論)
 - －實體測量：透過標準化方式進行測量，具有單位者，例：長度、重量、血壓、HRV...etc.
 - －虛體測量：無法透過儀器測量，必須透過心理計量工具(例：問卷、量表)，去測量(或量測(measure))心理特質(psychological traits)，例：壓力感受、生活品質、焦慮...etc.

2

心理計量測量(psychometric measure)

- 問卷，例：人口學問卷
 - 性別：☐男 ☐女
 - 出生年月日：_____年_____月_____日
 - 研究者釐清所欲收集的資訊，依序設計題目
 - 一題一資訊
- 量表：量表的編製必須根據所欲測量之心理特質相關理論來編製
 - 心理特質：單一心理特質、多重心理特質
 - 基本上，人的心理或行為特質皆被視為複雜的綜合體 (complexity)，而非簡單的(simplicity)。
 - 故許多名為「量表」(scale)者，通常是測量一個「大概念」，下面包含幾個「小概念」。
 - 例如：SF-36

3

Example: SF-36



台灣版簡介

SF-36為一個一般性 (generic) 的心理測量工具，並不是針對特定年齡、疾病或是治療而設計。SF-36美國版 (SF-36 Standard Version) 在1990年定稿，共有36項問題。主要測量受訪者身心健康狀態的8個面向 (concept)，分別為身體生理功能 (physical functioning)、因生理功能角色受限 (role limitation due to physical problems)、身體疼痛 (bodily pain)、一般健康 (general health)、活力 (vitality)、社會功能 (social functioning)、因情緒角色受限 (role limitation due to emotional problems)、心理健康 (mental health)。此外另含一項自評健康變化 (reported health transition)。由於其簡短及信效度皆佳，目前已有各國版本 (含德國、法國、義大利、日本、荷蘭、比利時、丹麥等國)。美國原版更進一步發展SF-12。

4

所以，心理測量充滿了挑戰...

- 你的工具...
- 測得好不好？(準不準?)有沒有問到(測到)想測的特質？
 - －效度問題(validity)
- 測得穩不穩？今天測，明天測，同樣的人，北部測，南部測，會不會都一樣？
 - －信度問題(reliability)

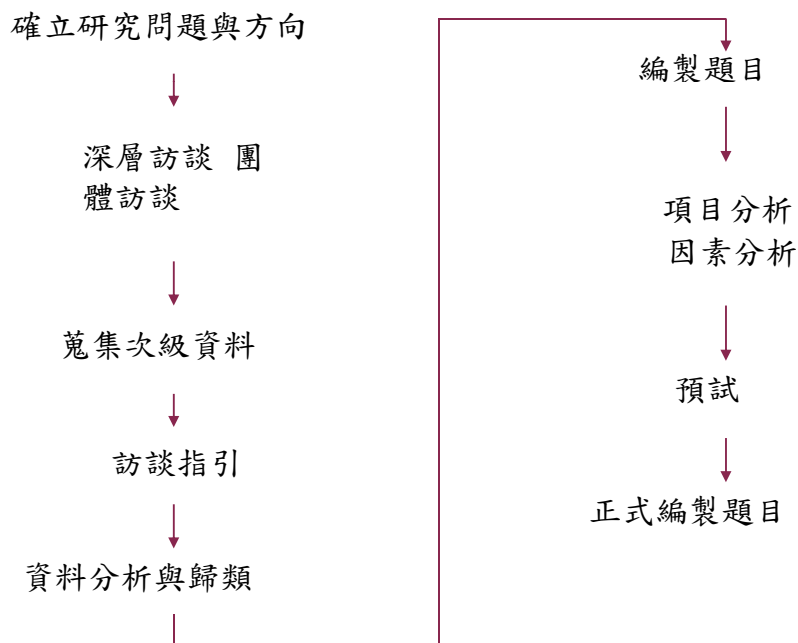
5

整體而言，量表開發必須要...

- 清楚的測量目的：你到底要測什麼？
- 有堅實的理論基礎(theoretical background)
- 經過專家驗證過的題目敘述，與問題設計
 - －題目與題目，甚至構面與構面都是相關的
- 清楚的概念架構(conceptual framework)或是構面架構(dimensionality)
- 而因素分析的功能：在於協助驗證構面架構
 - －你所提出來的構面架構?=資料跑出來的構面架構
- 也就是「建構效度」(construct validity)
- 通常我們使用因素分析(Factor Analysis)進行建構效度分析
- 去驗證你的理論構面會不會=資料的構面？這是一大風險。

6

量表編製的步驟



7

Introduction-Factor Analysis

- 大概是目前「知其然，不知其所以然」最多的統計方法。
 - 知其然：概念容易懂，大概懂要做什麼用
 - 不知其所以然：需要數學基礎
 - 矩陣：變異數-共變異數矩陣(Var-Cov matrix)
 - 相關係數矩陣(correlation matrix)
 - 特徵值(eigen value)
- 本講次將因素分析聚焦在工具開發上

8

關鍵性的資料處理

	item13	item14	item15	item16
1	5	5	5	5
2	5	4	4	4
3	5	4	5	5
4	4	4	4	4
5	5	5	4	5
6	5	5	4	4
7	5	5	5	5
8	5	5	4	4
9	5	5	5	5
10	5	4	4	4
11	5	5	5	5
12	5	5	5	4
13	5	5	5	4
14	4	5	5	5
15	5	4	4	4
16	5	5	5	5
17	5	5	5	5

變異數-共變異數矩陣 (Var-Cov matrix)

$$\Sigma^x = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{COV}_{12} & \text{COV}_{13} & \dots \\ \text{COV}_{12} & \sigma_2^2 & \text{COV}_{23} & \dots \\ \text{COV}_{13} & \text{COV}_{23} & \sigma_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 11.474 & 9.086 & 6.383 & 2.071 \\ 9.086 & 12.086 & 5.938 & 0.544 \\ 6.383 & 5.938 & 11.090 & 1.791 \\ 2.071 & 0.544 & 1.791 & 3.694 \end{pmatrix}$$

或, 相關係數矩陣 (correlation matrix)

$$\begin{bmatrix} 1.00000000 & 0.53804443 & -0.06968107 \\ 0.53804443 & 1.00000000 & -0.02669082 \\ -0.06968107 & -0.02669082 & 1.00000000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{yx} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{zx} & \rho_{zy} & 1 \end{bmatrix}$$

9

直覺性想法

Given nine metric variable ...

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉
X ₁	1.00	0.80	0.70	0.95	0.01	0.20	0.18	0.16	0.03
X ₂		1.00	0.63	0.75	0.08	0.11	0.13	0.04	0.09
X ₃			1.00	0.84	0.02	0.12	0.07	0.15	0.05
X ₄				1.00	0.01	0.11	0.06	0.02	0.13
X ₅					1.00	0.93	0.02	0.05	0.03
X ₆						1.00	0.11	0.09	0.02
X ₇							1.00	0.95	0.90
X ₈								1.00	0.93
X ₉									1.00

根據以上的9 × 9相關係數矩陣

- Variables 1, 2, 3 & 4 correlate highly with each other, but not with the rest of the variables.
- Variables 5 & 6 correlate highly with each other, but not with the rest of the variables.
- Variables 7, 8, & 9 correlate highly with each other, but not with the rest of the variables.
- 所以，我們可以合理猜測：
 - The nine variables seem to be measuring 3 "things" or underlying factors.
 - Q: What are these three factors?
 - Q To what extent does each variable measure each of these three factors?

11

因素分析的題目數與個案數

- 例如：SF-36，有36題，你收案100人
- 電腦軟體第一步就會把你的資料轉成一個36 × 36的相關係數矩陣(correlation matrix)，100人的資訊反而僅在幾個檢定中的自由度會用到。
- 那樣本數呢？樣本數其實對相關係數矩陣的敏感性不高。目前的共識，只知樣本數太少，矩陣會不穩定，一旦樣本數夠大，多一個或少一個個案，矩陣還算穩定。
- Tabachnick and Fidell (2001, page 588) cite Comrey and Lee's (1992) advise regarding sample size: 50 cases is very poor, 100 is poor, 200 is fair, 300 is good, 500 is very good, and 1000 or more is excellent.
- As a rule of thumb, a bare minimum of 10 observations per variable is necessary to avoid computational difficulties.

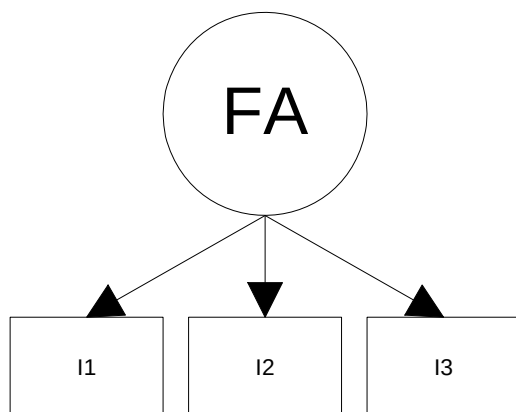
12

Sample size in Factor Analysis

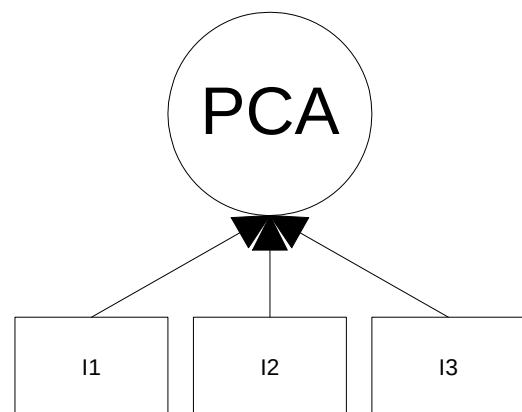
- Rule of 100: Gorsuch (1983) and Kline (1979, p. 40) recommended at least 100 (MacCallum, Widaman, Zhang & Hong, 1999). No sample should be less than 100 even though the number of variables is less than 20 (Gorsuch, 1974, p. 333; in Arrindell & van der Ende, 1985, p. 166);
- Hatcher (1994) recommended that the number of subjects should be the larger of 5 times the number of variables, or 100. Even more subjects are needed when communalities are low and/or few variables load on each factor (in David Garson, 2008).
- Rule of 150: Hutcheson and Sofroniou (1999) recommends at least 150 - 300 cases, more toward the 150 end when there are a few highly correlated variables, as would be the case when collapsing highly multicollinear variables (in David Garson, 2008).
- Rule of 200. Guilford (1954, p. 533) suggested that N should be at least 200 cases (in MacCallum, Widaman, Zhang & Hong, 1999, p84; in Arrindell & van der Ende, 1985; p. 166).
- Rule of 250. Cattell (1978) claimed the minimum desirable N to be 250 (in MacCallum, Widaman, Zhang & Hong, 1999, p84).
- Rule of 300. There should be at least 300 cases (Noru?is, 2005: 400, in David Garson, 2008).
- Significance rule. Lawley and Maxwell (1971) suggested 51 more cases than the number of variables, to support chi-square testing (in David Garson, 2008).
- Rule of 500. Comrey and Lee (1992) thought that 100 = poor, 200 = fair, 300 = good, 500 = very good, 1,000 or more = excellent They urged researchers to obtain samples of 500 or more observations whenever possible (in MacCallum, Widaman, Zhang & Hong, 1999, p84).

13

Conceptual FA and PCA



因素分析的概念：有一個或若干個共通的基底概念(underlying concept, 或稱common factors)可以去解釋多數的題目。

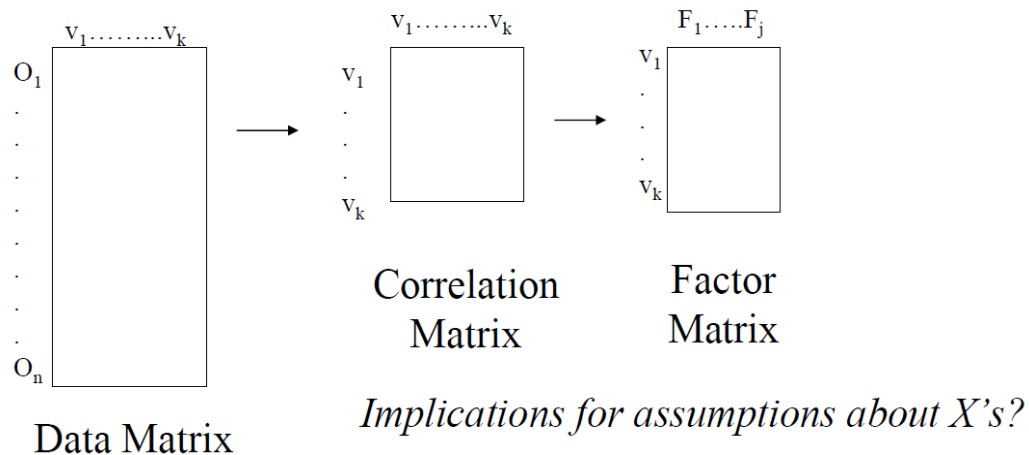


主成分分析的概念：多個題目可以合成一個主要的概念。

14

所以，因素分析是...

- Factor analysis is **totally dependent** on correlations between variables.
- Factor analysis summarizes correlation structure



15

小故事...

- 《清代皇帝秘史》記載乾隆下江南時，來到江蘇鎮江金山寺，看到山腳下大江東流，船來船往，人聲鼎沸，熱鬧非凡，便問旁邊一老和尚：「你在這裏住了幾十年，可知每天來來往往有多少船？」老和尚說：「我只看到兩隻船，一隻為名，一隻為利。」
- 這個老和尚真是有因素分析的智慧啊~

16

Where did the results come from?

Based on the basic “Classical Test Theory Idea”:

For a case with just one factor:

Ideal:

$$X_1 = F + e_1$$

$$X_2 = F + e_2$$

$$\dots$$
$$X_m = F + e_m$$

$$\text{var}(e_j) = \text{var}(e_k), j \neq k$$

e_i =獨特因素

Reality:

$$X_1 = \lambda_1 F + e_1$$

$$X_2 = \lambda_2 F + e_2$$

$$\dots$$
$$X_m = \lambda_m F + e_m$$

$$\text{var}(e_j) \neq \text{var}(e_k), j \neq k$$

(unequal “sensitivity” to change in factor)

(Related to Item Response Theory (IRT))

17

Multi-Factor Models

- 兩因子模式：理想上，我們希望這兩個基底概念是徹底不同(獨立或直交(orthogonal))，但是，事實並不然
- Two factor orthogonal model
- ORTHOGONAL = INDEPENDENT
- Example: cohesion has two domains

$$X_1 = \lambda_{11}F_1 + \lambda_{12}F_2 + e_1$$

$$X_2 = \lambda_{21}F_1 + \lambda_{22}F_2 + e_2$$

$$\dots\dots\dots$$
$$X_{11} = \lambda_{111}F_1 + \lambda_{112}F_2 + e_{11}$$

- More generally, m factors, n observed variables

$$X_1 = \lambda_{11}F_1 + \lambda_{12}F_2 + \dots + \lambda_{1m}F_m + e_1$$

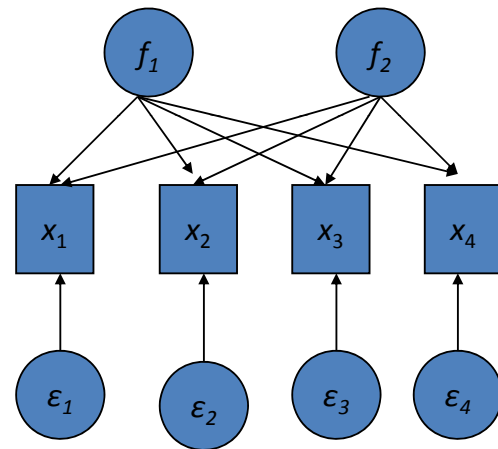
$$X_2 = \lambda_{21}F_1 + \lambda_{22}F_2 + \dots + \lambda_{2m}F_m + e_2$$

$$\dots\dots\dots$$
$$X_n = \lambda_{n1}F_1 + \lambda_{n2}F_2 + \dots + \lambda_{nm}F_m + e_n$$

18

二因素模型

二因素模型假定回答者在問題上之回答，係由二個部分組成，即共同因素 (common factor; f_1 與 f_2)，另一個是各變數所獨有的成分，即獨特因素 (unique factor; ϵ_i)。

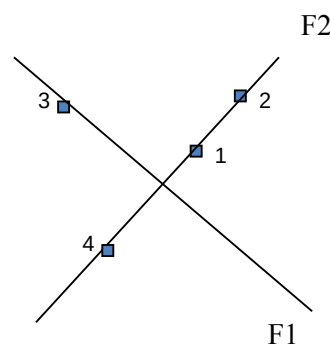
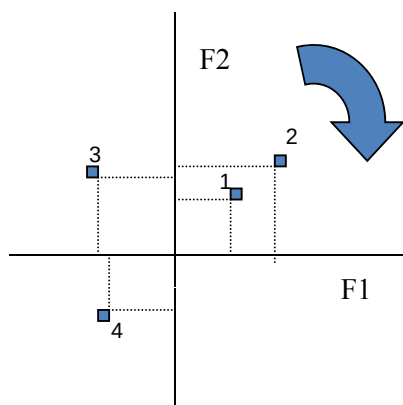


f_1 與 f_2 對 x_1, x_2, x_3, x_4 之解釋，一定有好有壞
因素負荷 (factor loading)

有時，因素負荷看不太出來主要特徵就會使用「因素轉軸」

19

因素轉軸 (Rotating Factors)



	Factor 1	Factor 2
x1	0.5	0.5
x2	0.8	0.8
x3	-0.7	0.7
x4	-0.5	-0.5

	Factor 1	Factor 2
x1	0	0.6
x2	0	0.9
x3	-0.9	0
x4	0	-0.9

20

Component Matrix^a

	Component	
	1	2
M	.675	.557
P	.718	.447
C	.683	.418
E	.793	-.410
H	.774	-.461
F	.838	-.359

Extraction Method:
Principal Component
Analysis.

a. 2 components
extracted.

Rotated Component Matrix^a

	Component	
	1	2
M	.139	.864
P	.244	.810
C	.236	.765
E	.866	.216
H	.886	.166
F	.866	.284

Extraction Method:
Principal Component
Analysis.

Rotation Method:
Varimax with Kaiser
Normalization.

a. Rotation converged in
3 iterations.

21

特徵值(eigenvalue)

到底是誰的特徵? 矩陣(A)的特徵。有方向(eigenvector)和值(eigenvalue)

If A is an $n \times n$ matrix, a real number λ is called an eigenvalue of A if

$$Ap = \lambda p$$

The nonzero vector p is called an eigenvector of A corresponding to λ .

Eigenvalues and eigenvectors are often called characteristic values and characteristic vectors, respectively.

22

特徵值大與小...

- 特徵值大：代表存在一個方向(特徵向量, eigenvector)，是你的資料所產生的相關係數矩陣所具有的特徵。值(eigenvalue)愈大，代表矩陣在這個方向上的投影(projection)愈大，愈有特徵，也就愈有研究的價值。原則上，須要選擇特徵值 >1 的方向才有價值。
- 特徵值小：投影後 <1 ，不具研究價值。

23

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy

Kaiser-Meyer-Olkin Test (KMO)

A second indicator of the strength of the relationship among items is the partial correlation coefficient. These partial correlations represent the correlations between each pair of items after removing the linear effects of all other items. The *Kaiser-Meyer-Olkin test* (KMO) is a measure of sampling adequacy that compares the magnitudes of the calculated correlation coefficients to the magnitudes of the partial correlation coefficients and takes the following form:

$$KMO = \frac{\sum (\text{correlations})^2}{\sum (\text{correlations})^2 + \sum (\text{partial correlations})^2}$$

Interpretation of the KMO as characterised by Kaiser, Meyer & Olkin (1974)

KMO Value	Degree of Common Variance
0.90 to 1.00	Marvelous
0.80 to 0.89	Meritorious
0.70 to 0.79	Middling
0.60 to 0.69	Mediocre
0.50 to 0.59	Miserable
0.00 to 0.49	Don't Factor

另外，**Bartlett's球形考驗 (Bartlett's test of sphericity)**：
Bartlett 球形考驗，若顯著，表示母體相關矩陣間有共同因素存在，適合進行因素分析。

24

量表範例

	非常 同意	同意	無意見	不同意	非常 不同意
1. 大體來說，我對我自己十分滿意	☐	☐	☐	☐	☐
2. 有時我會覺得自己一無是處	☐	☐	☐	☐	☐
3. 我覺得自己有許多優點	☐	☐	☐	☐	☐
4. 我自信我可以和別人表現得一樣好	☐	☐	☐	☐	☐
5. 我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	☐	☐	☐	☐	☐
6. 有時候我的確感到自己沒有什麼用處	☐	☐	☐	☐	☐
7. 我覺得自己和別人一樣有價值	☐	☐	☐	☐	☐
8. 我十分地看重自己	☐	☐	☐	☐	☐
9. 我常會覺得自己是一個失敗者	☐	☐	☐	☐	☐
10. 我對我自己抱持積極的態度	☐	☐	☐	☐	☐

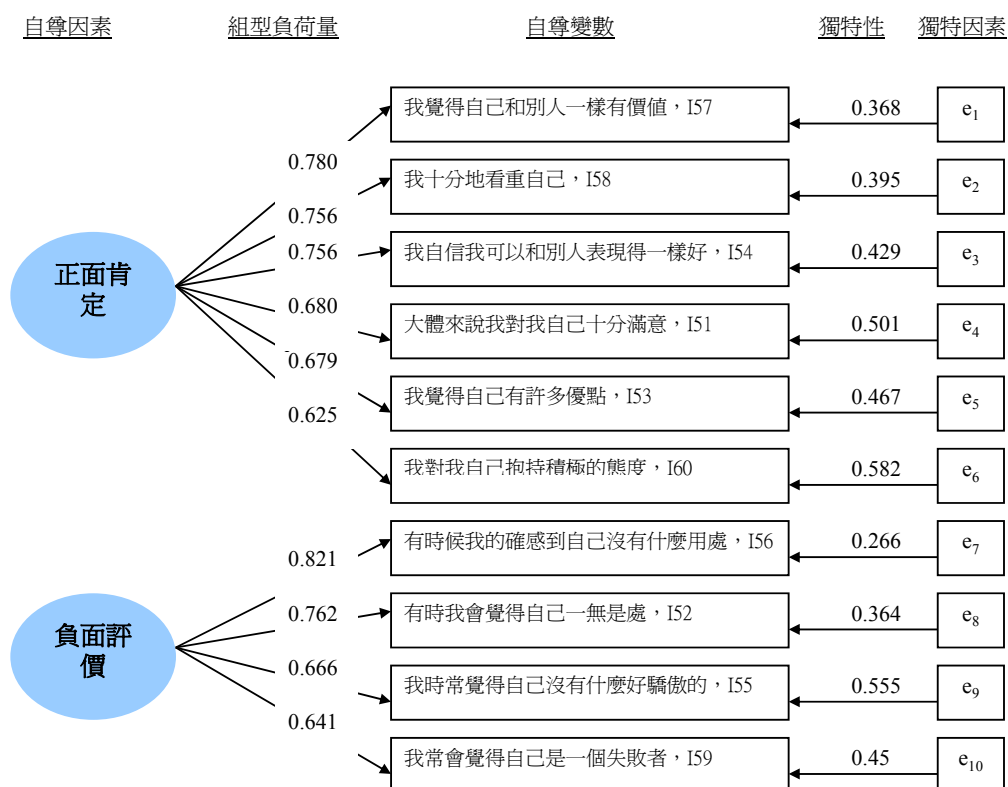
此問卷想要測量什麼？

「自尊」量表(Rosenberg(1965))

研究 構面	操作變項	衡量尺度
自尊 量表 (Rosenberg)	1. 大體來說，我對我自己十分滿意	五點量表
	2. 有時我會覺得自己一無是處	
	3. 我覺得自己有許多優點	
	4. 我自信我可以和別人表現得一樣好	
	5. 我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	
	6. 有時候我的確感到自己沒有什麼用處	
	7. 我覺得自己和別人一樣有價值	
	8. 我十分地看重自己	
	9. 我常會覺得自己是一個失敗者	
	10. 我對我自己抱持積極的態度	

因素分析後之因素負荷量矩陣

變數名稱	因素命名
7.我覺得自己和別人一樣有價值	正面肯定
8.我十分地看重自己	
4.我自信我可以和別人表現得一樣好	
1. 大體來說，我對我自己十分滿意	
3.我覺得自己有許多優點	
10.我對我自己抱持積極的態度	
6.有時候我的確感到自己沒有什麼用處	負面評價
2.有時我會覺得自己一無是處	
5.我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	
9.我常會覺得自己是一個失敗者	



「自尊」量表的未轉軸因素分析

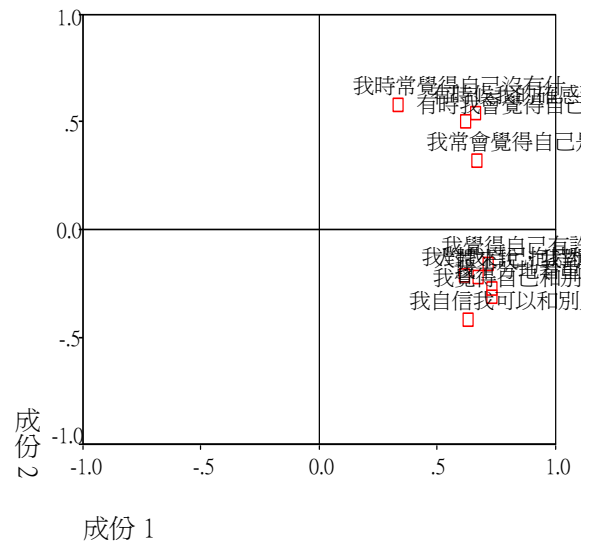
成份矩陣^a

	成份	
	1	2
我覺得自己和別人一樣有價值	.732	-.309
我十分地看重自己	.728	-.273
我覺得自己有許多優點	.713	-.158
大體來說，我對我自己十分滿意	.671	-.220
我常會覺得自己是一個失敗者	.667	.323
有時候我的確感到自己沒有什麼用處	.664	.542
我自信我可以和別人表現得一樣好	.628	-.422
有時我會覺得自己一無是處	.621	.500
我對我自己抱持積極的態度	.612	-.210
我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	.332	.579

方法：成分分析。

a. 2 個成份。

成份圖



29

轉軸後

問題之因素一可命名為「正面肯定」，
因素二可命名為「負面評價」

轉軸後的成份矩陣^a

	成份	
	1	2
我覺得自己和別人一樣有價值	.780	.153
我十分地看重自己	.756	.181
我自信我可以和別人表現得一樣好	.756	1.772 -.03
大體來說，我對我自己十分滿意	.680	.193
我覺得自己有許多優點	.679	.268
我對我自己抱持積極的態度	.625	.168
有時候我的確感到自己沒有什麼用處	.247	.821
有時我會覺得自己一無是處	.235	.762
我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	-4.856 -.02	.666
我常會覺得自己是一個失敗者	.372	.641

方法：成分分析。

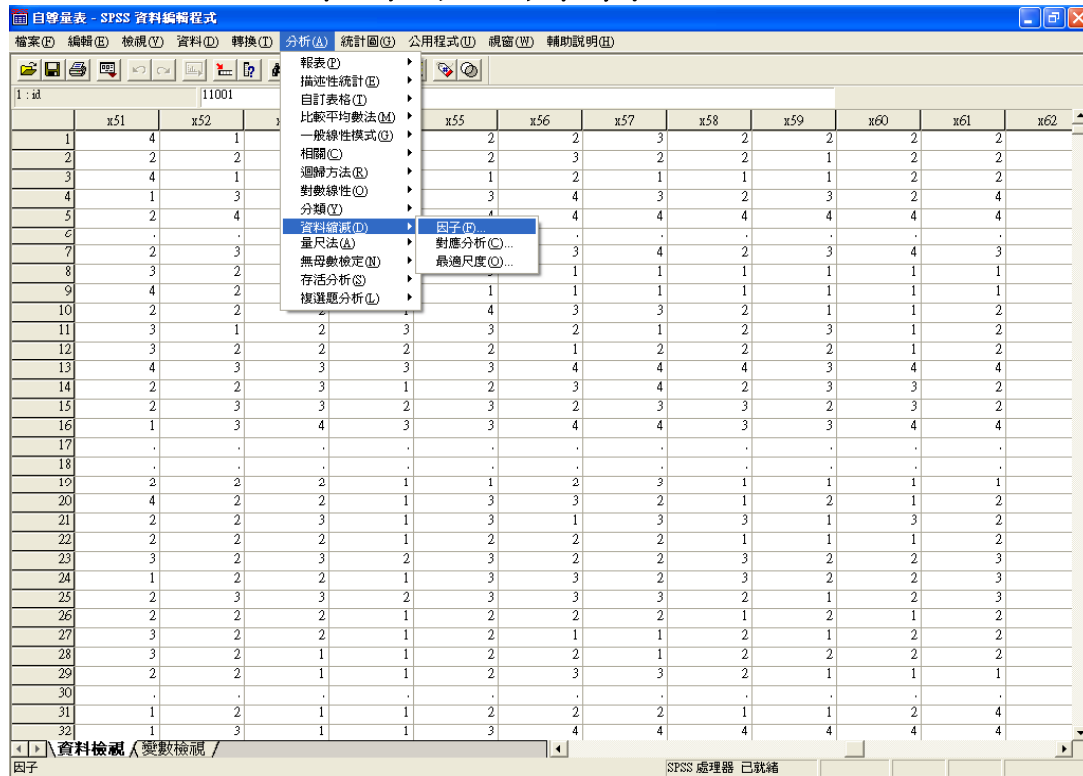
轉方法：轉方法：a 常態的 a a 法。

a. 轉軸 3 個。

30

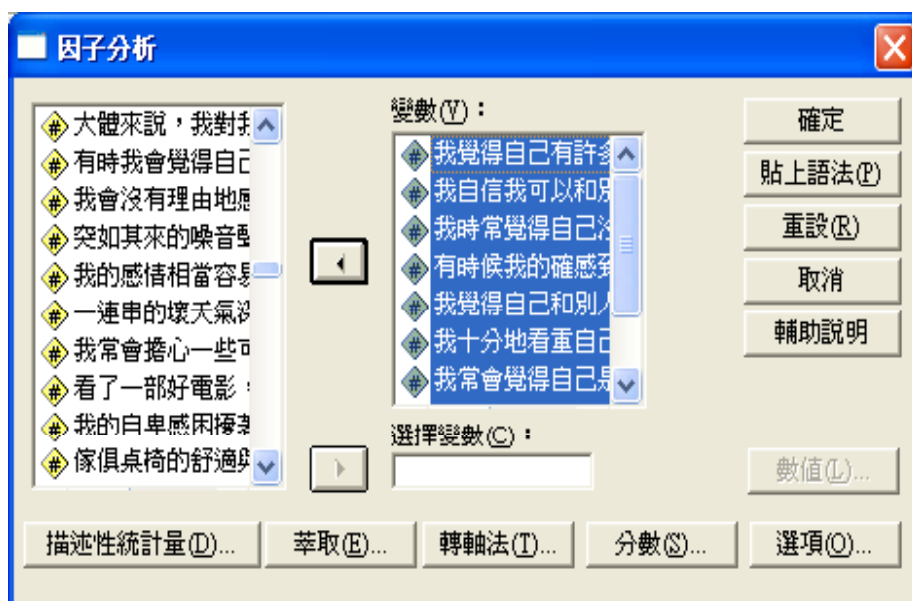
範例一操作

1



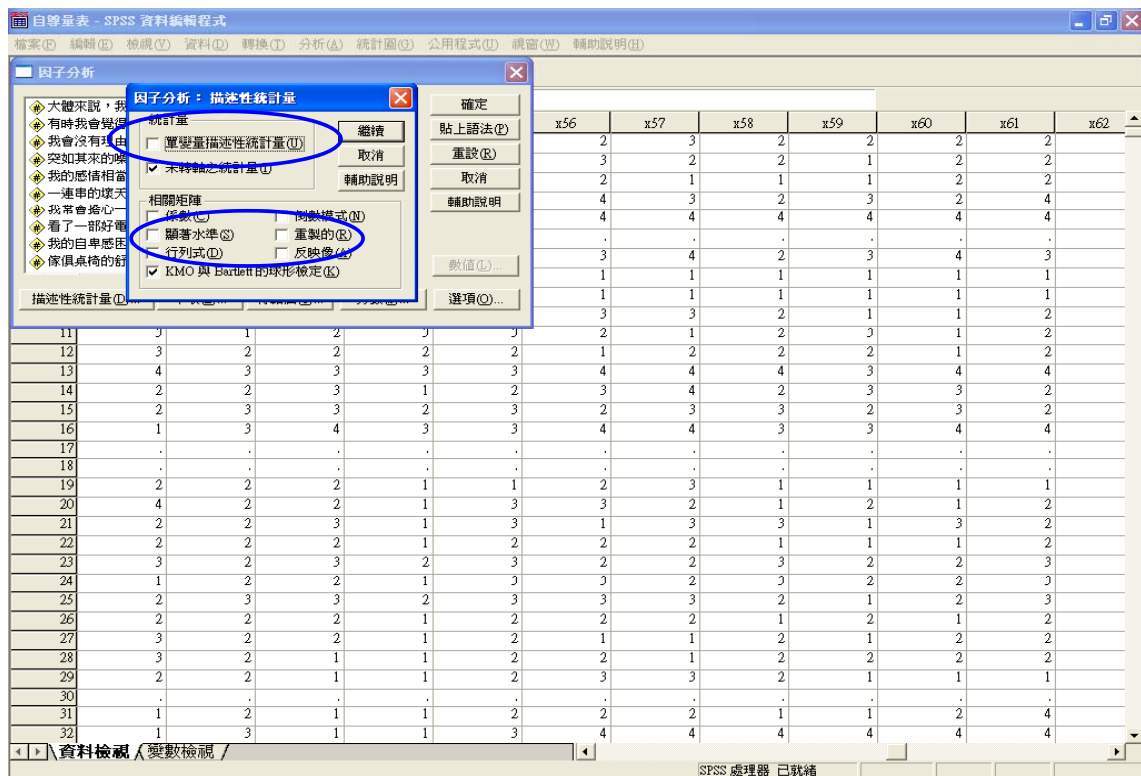
問題一操作

2



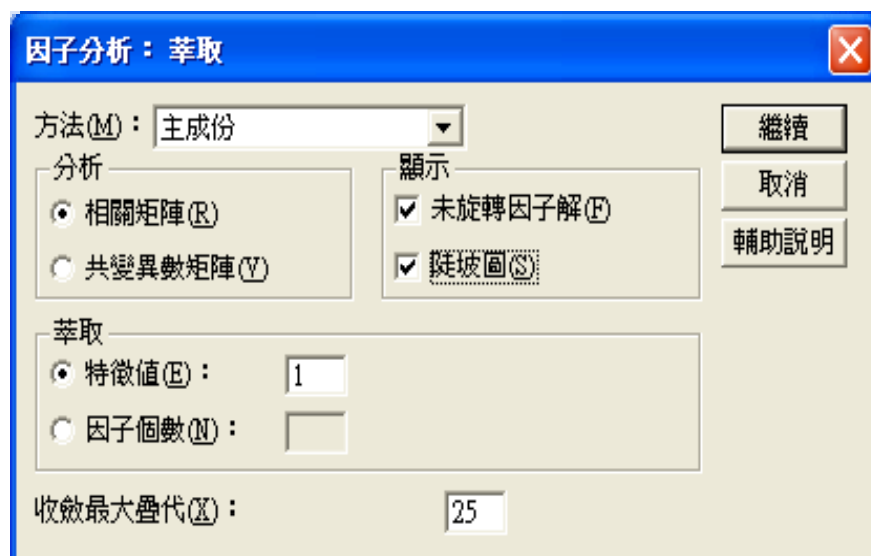
問題一操作

3



問題一操作

4



問題一操作

5

因子分析：轉軸法

方法

☐ 無(N) ☐ 四次方最大值轉軸法(Q)

☒ 最大變異法(V) ☐ Equamax 轉軸法(E)

☐ 直接斜交法(O) ☐ Promax(P)

Delta(D) : 0 Kappa 統計量數(K) 4

顯示

☒ 轉軸後的解(R) ☒ 因子負荷圖(L)

收斂最大疊代(X) : 25

繼續 取消 輔助說明

表 析1

KMO值為0.879，
表 變數的共同因
素多， 合作因素
分析。

a 定		
a - - 樣 性量數。		.879
a 定 方分		5569.703
自 度		45
性		.000

p-value 0.000，
 α 0.05，因此
，表 體相關矩陣
有共同因素，可
一 因素分析。

範例一 表 析2

說 變異量

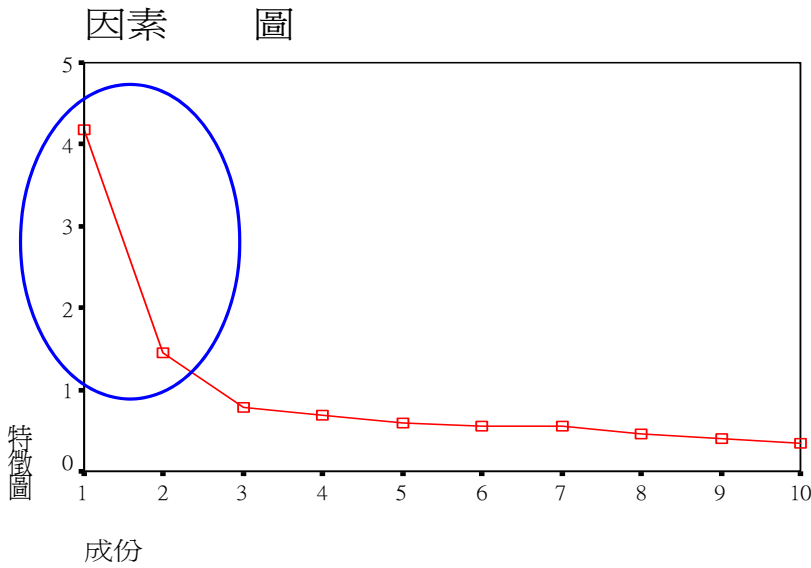
成份	特徵值			方和負荷量			轉軸 方和負荷量		
	和	變異數的	積	和	變異數的	積	和	變異數的	積
1	4.175	41.749	41.749	4.175	41.749	41.749	3.322	33.215	33.215
2	1.449	14.490	56.239	1.449	14.490	56.239	2.302	23.024	56.239
3	.773	7.733	63.972						
4	.693	6.931	70.903						
5	.598	5.980	76.883						
6	.555	5.546	82.429						
7	.550	5.500	87.928						
8	.468	4.675	92.603						
9	.392	3.916	96.520						
10	.348	3.480	100.000						

法： 成份分析。

我們以特徵值大 1為 因素的 ，共 兩個因素。轉軸後 一個因素的特徵值為3.322， 二個因素的特徵值為2.302， 變異量分別為33.215% 23.024% ，合 共 56.239% 的變異量。

範例一 表 析3

圖 定因素個數， 此 兩個因素。



範例一 表 析4

成份矩陣^a

	成份	
	1	2
我覺得自己和別人一樣有價值	.732	-.309
我十分地看重自己	.728	-.273
我覺得自己有許多優點	.713	-.158
大體來說，我對我自己十分滿意	.671	-.220
我常會覺得自己是一個失敗者	.667	.323
有時候我的確感到自己沒有什麼用處	.664	.542
我自信我可以和別人表現得一樣好	.628	-.422
有時我會覺得自己一無是處	.621	.500
我對我自己抱持積極的態度	.612	-.210
我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	.332	.579

方法：成分分析。

a. 2 個成份。

此成分矩陣，因素負荷不多，無法有命名(i.e. 10個變數分別兩個因素)，因此要因素轉軸，因素負荷值的可以大。

範例一 表 析5

因素一命名為正面肯定

轉軸後的成份矩陣^a

	成份	
	1	2
我覺得自己和別人一樣有價值	.780	.153
我十分地看重自己	.756	.181
我自信我可以和別人表現得一樣好	.756	1.772 -.03
大體來說，我對我自己十分滿意	.680	.193
我覺得自己有許多優點	.679	.268
我對我自己抱持積極的態度	.625	.168
有時候我的確感到自己沒有什麼用處	.247	.821
有時我會覺得自己一無是處	.235	.762
我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	-4.856 -.02	.666
我常會覺得自己是一個失敗者	.372	.641

方法：成分分析。

轉方法：轉方法：a 常態的 a a 法。

a. 轉軸 3 個。

因素二命名為負面評價

範例一 表 析6

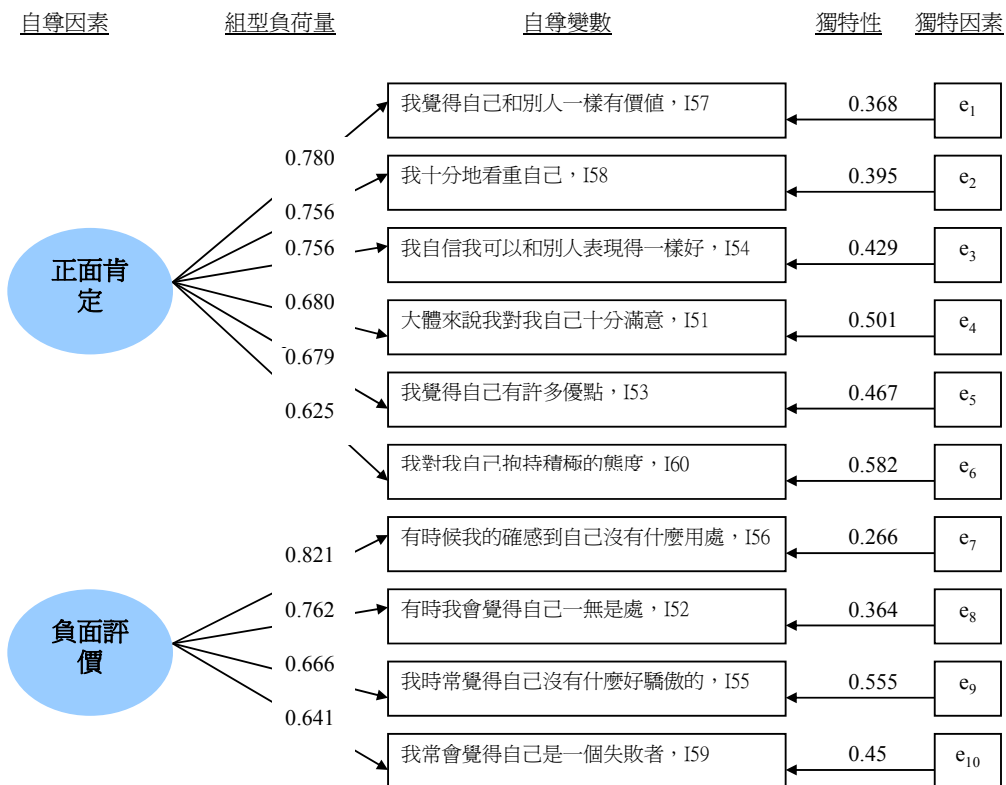
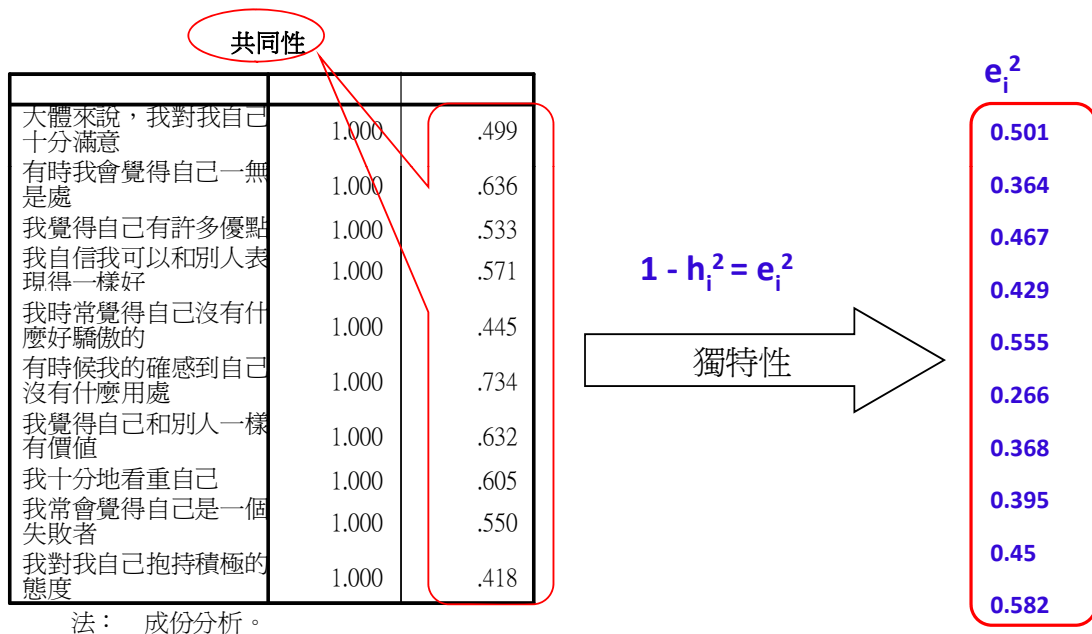


圖 構

範例一 表 析7

成份分數係數矩陣

	成份	
	1	2
我覺得自己有許多優點	.202	.005
我自信我可以和別人表現得一樣好	.287	-.157
我時常覺得自己沒有什麼好驕傲的	-.158	.376
有時候我的確感到自己沒有什麼用處	-.078	.399
我覺得自己和別人一樣有價值	.265	-.079
我十分地看重自己	.250	-.058
我常會覺得自己是一個失敗者	.008	.274
我對我自己抱持積極的態度	.203	-.038
大體來說，我對我自己十分滿意	.218	-.036
有時我會覺得自己一無是處	-.070	.369

方法：成分分析。
轉方法：轉方法：a 常態的 a a 法。

成分分數。

F 正面肯定

0.265 × I57 **0.250 × I58**

0.287 × I54 **0.218 × I51**

0.202 × I53 **0.203 × I60**

F 負面評價

0.399 × I56 **0.369 × I52**

0.376 × I55 **0.274 × I59**

探索性與驗證性因素分析的差別

- 做探索性因素分析時，研究者對因素的結構未知或只有極少的理論根據。因此研究者收集資料，探求或尋找能解釋變間相關的因素結構或理論。此稱為探索性因素分析(**exploratory factor analysis**)。
- 驗證性因素分析，則假設因素結構已知或已有假設性的先驗理論。驗證性因素分析(**confirmatory factor analysis**)的目的是要證實或確認這樣的因素結構吻合手上蒐集的資料。

Thank you for your attention!!

